环的同态

1. 环的同态: R, S 为环, 映射 $f : R \to S$ 满足 $\forall a, b \in R, f(a+b) = f(a)+f(b), f(ab) = f(a)f(b)$,则称 f 为 R 到 S 的同态;
   (a) 环同态 f 亦为加法群同态, 故 $f(0_R) = 0_S, f(-a) = -f(a)$;
   (b) 单 (满) 同态: f 是同态, 且 f 为单 (满) 射, 则称 f 为单 (满) 同态;
      i. 若 f 是满同态, 且 R, S 均有幺元, 则 $f(1_R) = 1_S$, 且 $a \in U(R) \Rightarrow f(a) \in U(S)$;
   (c) 设 $f : R \to S$ 是环的同态:
      i. 同态的像: 集合 $Imf = f(R) = \{f(r)|r \in R\}$, 同态的像是 S 的子环;
      ii. 同态的核: 集合 $Kerf = f^{-1}(0_S) = \{r \in R|f(r) = 0_S\}$, 同态的核是 R 的理想;
2. 同构: 若 f 是环同态, 且 f 是一一映射, 则称 f 为环的同构;
   (a) 若 f 是同构, 则 f^{-1} 也是同构;
3. 自同态 (同构): 同态 (同构)$f : R \to R$ 被称为自同态 (同构);
   (a) 环的所有自同构 ($Aut(R)$) 关于复合运算构成群;
4. 嵌入: 若 $f : R \to S$ 是环的单同态, 则称 f 为环 R 到 S 的嵌入;
5. 第一同构定理: 设 $f : R \to S$ 是环的同态, 则 $Kerf$ 是 R 的理想, 并且 $\bar{f} : R/Kerf \to S(\bar{r} \to f(r))$ 是环的单同态 (嵌入);
   (a) 特别的: $\bar{f} : R/Kerf \tilde{\to} Imf$;
6. 第二同构定理: 设 I, J 是环 R 的理想, 则 $I/(I \cap J) \simeq (I+J)/J$;
7. 第三同构定理: 设 I, J 是环 R 的理想, 若 $I \subset J$, 则 $\frac{R/I}{J/I} \simeq R/J$;
8. 若 I 是环 R 的理想, 则 $f : \{I \subseteq J \subseteq R, J\text{是理想}\} \to \{R/I\text{的所有理想}\}(J \to J/I)$ 是一一映射;
9. 环的特征: 设 R 是环, 若存在 $m \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $\forall r \in R$, 有 $mr = 0$, 则称满足此条件的最小正整数 m 为 R 的特征, 记为 $charR$;

   (a) 若不存在这样的正整数, 则称 $charR = 0$;

10. 素子环: 含幺环 R 中同构于 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}_m$ 的子环被称为 R 的素子环;

11. 设 R 是交换环, $charR = p$ 是素数, 则对 $\forall x, y \in R$, 有 $(x+y)^p = x^p + y^p$;

12. 设 R 是交换环, $charR = p$ 是素数, 则 $f : R \to R(r \to r^p)$ 是环的自同态;

13. 素理想: 若 R 的理想 P 满足下面的性质, 则称 P 为 R 的素理想:

   (a) $P \neq R$;

   (b) A, B 是 R 的任意两个理想, 若 $AB \subseteq P$, 则 $A \subseteq P$ 或 $B \subseteq P$;

14. 极大理想: 若 R 的理想 M 满足下面的性质, 则称 M 为 R 的极大理想:

   (a) $M \neq R$;

   (b) $\forall N \subseteq R$ 是 R 的理想, 若 $M \subseteq N \subseteq R$, 则 $N = M$ 或 $N = R$;

15. 设 R 是含幺交换环, P 是 R 的理想且 $P \neq R$, 则下面条件相互等价:

   (a) P 是 R 的素理想;

   (b) $\forall a, b \in R$, 若 $ab \in P$, 则 $a \in P$ 或 $b \in P$;

   (c) R/P 为整环;

16. 设 R 是含幺交换环, 则 R 是整环 $\Leftrightarrow (0)$ 为素理想;

17. 设 R 是含幺交换环, $M \subseteq R$ 是理想, 则 M 为 R 的极大理想 $\Leftrightarrow R/M$ 为域;

   (a) 特别的: 含幺交换环 R 为域的充要条件是 (0) 为 R 的极大理想;

18. 含幺交换环的极大理想是素理想;