环

1. 环: 集合 R 及 R 上的两个二元运算组成的代数结构 $(R, +, \cdot)$, 满足:
   (a) 加法交换群及零元素: $(R, +)$ 是 Abel 群, 单位元记为 0_R(或 0), 称为环 R 的零元素;
   (b) 乘法结合律: $(R, \cdot)$ 是半群;
   (c) 分配律: $\forall a, b, c \in R$, 有 $\begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (b+c)a = ba + ca \end{cases}$;
2. 交换环: 满足 $\forall a, b \in R$, 有 $ab = ba$ 的环;
3. 含幺环: R 是环, 且 $\exists 1_R \in R, s.t. \forall a \in R$, 有 $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$. 其中 1_R 称为环 R 的幺元素, 简记为 1;
4. 环中的零元素唯一, 幺元素 (若有) 也唯一;
5. 记号: n 个 a 相加记为 na, n 个 a 相乘记为 a^n;
6. 环的性质: 设 $(R, +, \cdot)$ 为环, 则
   (a) $\forall a \in R, 0a = a0 = 0$;
   (b) $\forall a, b \in R, (-a)b = a(-b) = -(ab), (-a)(-b) = ab$;
   (c) $a_i, b_j \in R, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m, \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_i b_j$;
   (d) $n \in \mathbb{Z}, a, b \in R$, 则 $(na)b = a(nb) = n(ab)$;
7. 零因子: R 是环, 且 $0 \neq a \in R$,
   (a) 左零因子: 若 $\exists 0 \neq b \in R, s.t. ab = 0$, 则称 a 为左零因子;
   (b) 右零因子: 同理;
   (c) 零因子: 若 a 同时是左零因子和右零因子, 则称 a 为零因子;
8. 逆元: R 为含幺环, $a \in R$,
   (a) 左逆: 若 $\exists c \in R, s.t. ca = 1$, 则称 a 左可逆, 并称 c 为 a 的左逆;
   (b) 右逆: 同理;
9. 可逆元: 若 a 左可逆且右可逆, 则有唯一逆元 a^{-1}, 称 a 为可逆元;

   (a) 单位: 环 R 中的可逆元称为 R 中的单位;

10. 单位群: 含幺环中的全体单位形成乘法群, 称为 R 的单位群, 记作 $U(R)$;

11. 整环: 含幺交换环 R 中, $0 \neq 1$, 且 R 中没有零因子, 则称 R 为整环;

12. 体 (除环): 含幺环 R 中, $0 \neq 1$, 且 $U(R) = R \backslash \{0\}$, 则称 R 为体;

   (a) 含幺环 R 是体 $\Leftrightarrow (R \backslash \{0\}, \cdot)$ 成群;

13. 域: R 是体, 且 R 为交换环, 则称 R 为域;

   (a) 域是整环;

14. 整环, 体, 域中至少包含两个元素 0 和 1;

15. 子环: $(R, +, \cdot)$ 是环, $S \subseteq R$, 若 $(S, +, \cdot)$ 构成环, 则称 S 为 R 的子环;

   (a) 子体 (域): 若 $(S, +, \cdot)$ 是体 (域), 则称 S 为 R 的子体 (域);
   (b) 若 $S \subseteq R$ 是子环, 则 $\forall a, b \in S$, 有 $a - b, ab \in S$;
   (c) 平凡子环: $\{0\}, R$;

16. 设 S 是环 R 的子环, 加法商群 R/S 对乘法 $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$ 成环的充要条件: $\forall r \in R, a \in S$, 有 $ra, ar \in S$;

17. 理想: 环 R 的子环 S 若满足: $\forall r \in R, a \in S$, 有 $ra, ar \in S$, 则称 S 为环 R 的理想;

   (a) 理想的判定: $S \subseteq R$ 是理想, 当且仅当
      i. $\forall a, b \in S, a - b \in S$;
      ii. $\forall r \in R, a \in S, ra, ar \in S$;
   (b) 平凡理想: $(0), R$;

18. 商环: 设 A 是环 R 的理想, 则 R/A 对自然定义的加法和乘法 ($\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$) 成环, 称之为 R 对于理想 A 的商环;

19. 单环: 只有平凡理想的环;

20. 一些结论:

   (a) $I \subseteq R$ 为理想, 若 $1_R \in I$, 则 $I = R$. 即体和域为单环;

(b) 整数环 $\mathbb{Z}$ 的全部子环: $m\mathbb{Z}, m \geq 0$. 它们也是 $\mathbb{Z}$ 的全部理想;

(c) $A_i, i \in I$ 为 R 的理想, 则 $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ 也是 R 的理想;

21. 集合 X 生成的理想: 子集 $X \subseteq R$, R 中包含 X 的最小理想称为由集合 X 生成的理想, 记为 (X);

22. 主理想: 由一个元素 $x \in R$ 生成的理想 (x) 被称为环 R 的主理想;

    (a) 主理想整环 (PID): 若 R 是整环, 且 R 的每个理想都是主理想 $(x) = xR$, 则 R 被称为主理想整环;