群在集合上的作用

1. 置换表示: 群 G 到 S_X 的同态 $f: G \to S_X$;

   (a) 忠实表示: 若 f 为单射, 则称其为忠实表示;

   (b) 等价关系: 设 $\rho: G \to S_X$ 是置换表示, 定义 X 上的关系"$\sim$"为 $\forall a, b \in X, a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G, s.t. ga = b$, 则 $\sim$ 为等价关系;

      i. 等价类: 对任意 $a \in X$, a 所在的等价类 $[a] = Ga = \{ga | g \in G\}$;

   (c) 轨道: 每个等价类叫做一个 $G-$ 轨道, 或简称轨道;

      i. 拆分: 集合 X 的拆分 $X = \cup_{a \in I}[a]$(不交并)$= \cup_{a \in I} Ga$(不交并);

      ii. 传递: 若 G 在 X 上的作用只有一个轨道, 则称 G 在 X 上是传递的;

   (d) Cayley 定理: 每个群均同构于某个置换群;

2. 固定子群: 设群 G 作用在集合 X 上, 对 $\forall a \in X$, 记 $G_a = \{g \in G | ga = a\} (\leq G)$ 称为元素 a 的固定子群;

   (a) 轨道公式: 设 G 是有限群, G 作用于集合 X, $a \in X$, 则 $|G| = |G_a||[a]|$;

      i. 设 G 是 $2n$ 阶群, $2 \nmid n$, 则 G 必有指数为 2 的正规子群;

      ii. 设 G 是有限群, $|G| \geq 6$ 且 $|G| = 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, 则 G 不是单群;

      iii. 设 G 是有限群, p 是 $|G|$ 的最小素因子, 如果 $N \leq G, [G:N] = p$, 则 $N \lhd G$;

3. 线性表示: $f: G \to GL(V)$;

4. $H \leq G \Rightarrow |H| | G|$. 反之不成立, 即 $d | |G|$, 群 G 未必有 d 阶子群;

5. Sylow 定理: 设 $p^r | |G|$, 其中 p 为素数, 以 $N(n)$ 表示 G 中 n 阶子群的个数, 则 $N(p^r) = 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 特别地, 若 $p^r | |G|$, 则 G 至少存在一个 p^r 阶子群;

   (a) Sylow$-p$ 子群: 设 G 为 $p^r n$ 阶群, 其中 p 为素数, $r \geq 1, p \nmid n$, 则 G 的每个 p^r 阶子群均叫做 G 的西罗 $p-$ 子群;

   (b) 设 G 为有限群, 则:

  i. 对 $|G|$ 的每个素因子 p, 均存在 G 的西罗 $p-$ 子群;
  ii. G 的西罗 $p-$ 子群彼此共轭;
  iii. G 的西罗 $p-$ 子群的个数恒等于 $1(\bmod p)$;
  iv. 设 P 为 G 的一个西罗 $p-$ 子群, 则 G 的西罗 $p-$ 子群的个数为 $[G:N_G(P)]$;

(c) 设素数 $p||G|$, 则 G 的每个 p 方幂阶的子群 B 均包含在 G 的某个西罗 $p-$ 子群内;

(d) 设 P 是 G 的西罗 $p-$ 子群, $A \leq G$, 且 $N_G(P) \leq A$, 则 $N_G(A) = A$;

(e) Fratini 定理: $M \triangleleft G, P$ 为 M 的西罗 $p-$ 子群, 则 $G = MN_G(P)$;

6. 一些结论:

(a) 设 p 和 q 是两个素数, 则 pq 阶群 G 不是单群;

(b) 设 p 和 q 是两个素数, 则 p^2q 阶群 G 不是单群;