群的同态

1. 群的同态: 设 $(G,\cdot)$ 和 $(G',\circ)$ 是两个群,若映射 $f:G\to G'$ 满足 $\forall a,b\in G$,有 $f(a\cdot b)=f(a)\circ f(b)$,则称 f 是群 G 到 G' 的同态;
   (a) 单同态: 若 f 是单射, 则 f 为单同态;
   (b) 满同态: 若 f 是满射, 则 f 是满同态;
   (c) 设 G,H 为群, $f:G\to H$ 是群的同态, 则 $f(e_G)=e_H$, 且 $\forall a\in G$, 有 $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$. 即群同态将单位元映射到单位元, 逆元映射到逆元;
2. 同构: 若同态映射 f 是双射, 则 f 是群 G 到 G' 的同构. 记为 $f:G\tilde{\to}G'$ 或 $G\cong G'$. 同构的群被认为本质上是相同的;
   (a) 群 G 到自身的同态 (同构) 叫做群 G 的自同态 (自同构);
   (b) 记 $Aut(G)$ 为群 G 的自同构全体, 则它构成群;
3. 循环群的性质: 设 $G=<a>$ 是由 a 生成的循环群, 则:
   (a) 若 $o(a)=\infty$, 则 $G\cong(\mathbb{Z},+)$, 称 G 为无限循环群;
   (b) 若 $o(a)=n$, 则 $G\cong(\mathbb{Z}_n,+)$, 称 G 为 n 阶循环群;
   (c) 同阶循环群彼此同构;
   (d) $(\mathbb{Z},+)$ 的生成元只有 1 或 -1; $(\mathbb{Z}_n,+)$ 的生成元只能是 $\bar{a}$, 其中 $(a,n)=1$;
      i. 即若 $o(a)=\infty$, 则 G 的生成元只有 a 和 a^{-1}; 若 $o(a)=n$, 则 G 的生成元只有 $a^k(1\le k<n,(k,n)=1)$;
   (e) 循环群的子群仍然是循环群, 且:
      i. $(\mathbb{Z},+)$ 的全部子群 $H_m=<m>,m=0,1,2,...$;
      ii. $(\mathbb{Z}_n,+)$ 的全部子群为 $<\bar{0}>$ 和 $<\bar{d}>,d|n$;
   (f) 循环群的同构群:
      i. $(\mathbb{Z},+)$ 的自同构群 $Aut(\mathbb{Z})$ 是二元群;
      ii. $(\mathbb{Z}_n,+)$ 的自同构群 $Aut(\mathbb{Z}_n)$ 是同构于 $(\mathbb{Z}_n^*,\cdot)$;
4. 自共轭子群: 共轭子群只有自身的子群;

5. 正规子群: 设 G 是群, $N \le G$ 称为 G 的正规子群, 若对 $\forall g \in G$, 有 $g^{-1}Ng = N$, 记为 $N \triangleleft G$(即 N 是 G 中的自共轭子群);
   (a) 等价条件:
      i. $N \triangleleft G$;
      ii. $\forall g \in G, gN = Ng$;
      iii. $N_G(N) = G$;
      iv. G 对于 N 的每个左陪集均是右陪集;
      v. $\forall g \in G, h \in N$, 有 $g^{-1}hg \in N$;
6. 商群: 设 G 是群, $N \triangleleft G$, 对 $\forall a \in G$, 记 $\bar{a} = Na = aN$. 在集合 $\bar{G} = \{\bar{a}|a \in G\}$ 上定义二元运算 $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$. $\bar{G}$ 对此运算形成群 (幺元 $\bar{e}$, 逆元 $\bar{a}^{-1} = \overline{a^{-1}}$), 称为 G 对正规子群 N 的商群, 记为 $\bar{G} = G/N$;
   (a) 若 G 是有限群, 则 $|G/N| = [G : N] = [G]/|N|$;
7. 同态定理: 设 $f : G \to G'$ 是群的同态, 则:
   (a) $Imf = f(G) \le G'$;
   (b) $Kerf = f^{-1}(e_{G'}) = \{g \in G|f(g) = e_{G'}\} \triangleleft G$;
   (c) 映射 $\pi : G \to G/Kerf, \pi(g) = gKerf$ 是满同态;
   (d) 存在唯一同态 $\bar{f} : G/Kerf \to G'$, 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$, 且 $\bar{f}$ 是单同态 (称 $\bar{f}$ 是由 f 诱导的同态);
   (e) $Im\bar{f} = Imf$, 即 $\bar{f} : G/Kerf \tilde{\to} Imf$;
8. 同态基本定理: 设 $f : G \to G'$ 是群的同态, 则 $Imf = f(G)$ 是 G' 的子群, $Kerf = f^{-1}(e_{G'}) = \{g \in G|f(g) = e_{G'}\}$ 是 G 的正规子群, 并且有群同构 $\bar{f} : G/Kerf \tilde{\to} Imf, (\bar{g} \mapsto f(g))$;
   (a) 推论: 设 $f : G \to G'$ 是群的同态, 则
      i. f 是单同态 $\Leftrightarrow Kerf = \{e_G\}$;
      ii. 若 f 是满同态, 则有 (正则) 同构 $\bar{f} : G/Kerf \tilde{\to} G'$;
9. 设 G 是群, $N \triangleleft G$, 则 $\{M|N \le M \le G\} \leftrightarrow \{\text{subgroups of } G/N\}$, $\{M|N \le M \le G\} \leftrightarrow \{\text{invariant subgroups of } G/N\}$, 且对 $N \le M \le G$, 有 $M \triangleleft G \Leftrightarrow M/N \triangleleft G/N$;

10. 设 G 是群, $N, M \lhd G$, 且 $N \leq M$, 则 $N \lhd M$, $M/N \lhd G/N$, 且 $(G/N)/(M/N) \cong G/M$;

11. 设 G 是群, $N \lhd G$, 且 $H \leq G$, 则 $(H \cap N) \lhd H$, $N \lhd NH \leq G$, 并且 $NH/N \cong H/(H \cap N)$;