子群的陪集

1. 整数模 n 加法群: 设 n 为正整数, 在 $\mathbb{Z}$ 上定义关系 $a,b\in\mathbb{Z}, a\sim b\Leftrightarrow n|(a-b)$(即 $a\equiv b(mod\ n)$), 定义 $\bar{i}=\{m\in\mathbb{Z}|m\equiv i(\mod n)\}$, 则 $\mathbb{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},...,\overline{n-1}\}$. 定义二元运算"+": $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$, $\mathbb{Z}_n$ 关于"+"形成交换群, 形成整数模 n 加法群;
2. 设 G 是群, $A\leq G$, 定义 G 上的关系为 $g,h\in G, g\sim h\Leftrightarrow gh^{-1}\in A$, 则 $\sim$ 是 G 上的关系, 并且 $\forall g\in G, [g]=Ag$;
3. 右陪集: 由上面的引理知, 群 G 可以分拆称一些不同等价关系集合 Ag, 每个等价类 Ag 叫做 G 对于子群 A 的右陪集;
    (a) 右陪集代表元系: 如果 $R=\{g_i|i\in I\}$ 是 G 对于上述等价关系的完全代表元系, 则称它为 G 对 A 的右陪集代表元系;
    (b) 右陪集分解: 有 $G=\cup_{g\in R}Ag$, 称之为 G 对子群 A 的右陪集分解;
    (c) 指数: 不同右陪集的个数 $|R|$, 记为 $[G:A]$, 称为子群 A 对群 G 的指数 (指标);
4. 左陪集: 类似定义 gA 为 G 的左陪集, 左陪集代表元系, 左陪集分解等;
    (a) 左陪集与右陪集一一对应, 个数相等;
5. 集合的阶: 集合 G 中元素的个数, 记作 $|G|$ 或 $\#(G)$;
6. 拉格朗日 (Lagrange) 定理: 设 G 是有限群, $A\leq G$, 则 $|G|=|A|\cdot[G:A]$. 特别地, 群 G 的每个子群的阶都是 G 的阶的因子;
    (a) 素数阶群只有平凡子群;
    (b) 设 G 是有限群, 则 G 中每个元素 g 的阶均是 $|G|$ 的因子;
    (c) p(素数) 阶群 G 均是 Abel 群 (交换群);
        i. 素数阶群一定是循环群;
    (d) 非 Abel 群的最小阶数是 6;
7. 设 G 是有限群, $A,B\leq G$, 则:
    (a) $|AB|=|A|\cdot|B|/|A\cap B|$;
    (b) 若 $A\leq B\leq G$, 则 $[G:A]=[G:B][B:A]$;

(c) $[G : A \cap B] \leq [G : A][G : B]$. 若 $[G : A]$ 和 $[G : B]$ 互素, 则 $[G : A \cap B] = [G : A][G : B]$, 且 $AB = G$;

8. 共轭: 设 G 是群, $a, b \in G$, 称 $b^{-1}ab$ 为 a 的共轭元素;

   (a) 集合共轭: $A, B \subseteq G$, 若 $\exists g \in G, s.t. : g^{-1}Ag = B$ 称 A 与 B 共轭;

   (b) 共轭类: 群 G 的子集之间的共轭关系是等价关系, 每个等价类被称为共轭类;

      i. 集合 $g^{-1}Ag$ 与 A 之间一一映射;

      ii. 若 A 是有限集合, 则 $|g^{-1}Ag| = |A|$;

   (c) 共轭子群: 若子群 $A \leq G$, 则 $g^{-1}Ag \leq G$ 称为 A 的共轭子群;

9. 正规化子: 设 G 是群, 子集 $M \subseteq G$, 则 $N_G(M) = \{g \in G | g^{-1}Mg = M\}$ 是 G 的子群, 称之为 M 的正规化子;

10. 中心化子: 设 G 是群, 子集 $M \subseteq G$, 则 $C_G(M) = \{g \in G | g^{-1}ag = a, \forall a \in M\}$ 是 G 的子群, 称之为 M 的中心化子;

   (a) 中心: 记 $C(G) = C_G(G)$ 称为群 G 的中心;

   (b) 中心元素: C(G) 中的元素;

   (c) 一些结论:

      i. G 是交换群, 等价于 $G = C(G)$;

      ii. $C_G(M) \leq N_G(M)$;

      iii. $\forall a \in G, C_G(a) = N_G(a)$;

11. 若 G 是群, 子集 $M \subseteq G$, 则与 M 共轭的子集个数为 $[G : N_G(M)]$;

   (a) 设 G 是群, $a \in G$, 则与 a 共轭的元素个数等于 $[G : C_G(a)]$;

12. 设 p 为素数, $n \geq 1$, G 为 p^n 阶群, 则 $|C(G)| > 1$, 即 G 有非单位元的中心元素;

   (a) 设 p 为素数, p^2 阶群 G 为 Abel 群;