群

1. 结合律: 集合 S 上的二元运算 f 称为满足结合律, 是指 $f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z)), x,y,z \in S$, 简记为 $(xy)z = x(yz)$;

2. 半群: 具有二元运算"$\cdot$"的集合 S, 若该运算满足结合律, 则 $(S,\cdot)$ 被称为半群;

3. 单位元 (幺元): 设 $(S,\cdot)$ 是半群, $e \in S$, 若对 $\forall x \in S$, 有 $xe = ex = x$, 则称 e 为半群 S 的单位元;

   (a) 单位元唯一: 若 $e, e' \in S$ 是单位元, $e = ee' = e'$;

   (b) 左右单位元:

      i. 左单位元: 若 $e_L \in G$ 满足 $\forall a \in G, e_L a = a$, 则 e_L 称为左单位元;

      ii. 右单位元: 若 $e_R \in G$ 满足 $\forall a \in G, a e_R = a$, 则 e_R 称为右单位元;

4. 含幺半群: 含有单位元的半群;

5. 群: 设 G 是一个非空集合, $(G,\cdot)$ 是群若 G 上的二元运算"$\cdot$"(封闭性) 满足:

   (a) 结合律: $\forall a,b,c \in G, (ab)c = a(bc)$;

   (b) 单位元 (幺元): $\exists e \in G : \forall a \in G, ea = ae = a$;

   (c) 逆元: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, s.t. : a^{-1}a = aa^{-1} = e$;

6. 群的逆元唯一: 若 $a^{-1}, a'^{-1} \in G$ 都是 a 的逆元, 则 $e = a^{-1}a = a'^{-1}a = aa^{-1} = aa'^{-1}$;

   (a) 含幺半群左右逆元相同: 设 $(G,\cdot)$ 为一个含幺半群, 若元素 $a \in G$ 有左逆元 a_L^{-1} 和右逆元 a_R^{-1}, 则 $a_L^{-1} = a_R^{-1} = a^{-1}$ 为 a 的逆元;

7. 交换群 (阿贝尔群): 满足交换律的群;

8. 设 $(M,\cdot)$ 是含幺半群, M^* 是半群 M 中的可逆元素全体, 则 $(M^*,\cdot)$ 是群;

9. 半群 $(G,\cdot)$ 是群, 当且仅当 (右单位元和右逆元定义同样成立):

(a) G 有左单位元 e_L: 即 $\forall a \in G: e_L a = a$;

(b) $\forall a \in G$, 有左逆元 a^{-1}, 使得 $a^{-1}a = e_L$;

10. 半群 $(G, \cdot)$ 是群, 当且仅当: $\forall a, b \in G$, 方程 $ax = b$ 和 $ya = b$ 在 G 中均有解;

11. 有限半群 $(G, \cdot)$ 是群, 当且仅当左右消去率都成立: $ax = ay \Rightarrow x = y$ 且 $xa = ya \Rightarrow x = y$;