# 交换环中的因子分解

1. 基本概念: 设 $R$ 是交换环, $a, b \in R$:

   (a) 整除: $a \neq 0$, 若 $\exists x \in R$, 使得 $ax = b$, 则称 $a$ 整除 $b$(或 $b$ 被 $a$ 整除), 记为 $a|b$;

      i. 若 $\nexists x \in R$, 使得 $ax = b$ 则称 $a$ 不能整除 $b$(或 $b$ 不能被 $a$ 整除), 记作 $a \nmid b$;

   (b) 因子: 若 $a|b$, 则称 $a$ 为 $b$ 的因子;

   (c) 倍元: 若 $a|b$, 则称 $b$ 为 $a$ 的倍元;

   (d) 相伴: 若 $a, b \neq 0$, 且有 $a|b$ 和 $b|a$, 则称元素 $a$ 与 $b$ 相伴, 记作 $a \sim b$($R\backslash\{0\}$ 上的等价关系);

2. 基本概念: 设 $R$ 是含幺交换环, $a, b \in R$:

   (a) 真因子: 若 $a = bc, b, c \neq 0$ 且 $b, c \notin U(R)$, 则称 $b$ 和 $c$ 为 $a$ 的真因子;

   (b) 不可约元: 若 $0 \neq a \in R, a \notin U(R)$, 且 $a$ 没有真因子, 则称 $a$ 为不可约元;

   (c) 素元: 设 $0 \neq p \in R, p \notin U(R)$, 且 $\forall a, b \in R$, 若 $p|(ab)$, 则 $p|a$ 或 $p|b$;

      i. 在整数环 $\mathbb{Z}$ 中, 不可约元与素元一致;

3. 设 $R$ 是含幺交换环, $a, b, u \in R\backslash\{0\}$, $U(R)$ 为 $R$ 的单位群, 则:

   (a) $a|b \Leftrightarrow (b) \subseteq (a)$; $a \sim b \Leftrightarrow (a) = (b)$;

   (b) $u \in U(R) \Leftrightarrow u \sim 1 \Leftrightarrow (u) = R \Leftrightarrow u|r, \forall r \in R$;

   (c) $a = bu, u \in U(R) \Rightarrow a \sim b$;

      i. 若 $R$ 是整环, 则逆命题也成立;

   (d) R 是整环, $a$ 为 $b$ 的真因子 $\Leftrightarrow a \notin U(R), (b) \subseteq (a)$ 但 $(b) \neq (a)$;

4. 设 $R$ 是整环, $p, c \in R\backslash\{0\}$, $S = \{(a) | a \in R, a \neq 0, a \notin U(R)\}$, 则:

   (a) $p$ 是素元 $\Leftrightarrow (p)$ 是非零素理想;

   (b) $c$ 是不可约元 $\Leftrightarrow (c)$ 为 $S$ 中的极大元;

   (c) $R$ 中的素元必是不可约元;

(d) 若 $R$ 是主理想整环, 则不可约元必是素元;

5. 唯一因子分解整环 (UFD): 满足下面条件的整环 $R$ 被称为唯一因子分解整环:
   (a) 分解存在性: 每个非零非单位的元 $a \in R$ 均可写成 $a = c_1c_2...c_n$, 其中 $c_i, i = 1, ..., n$ 为不可约元;
   (b) 分解的唯一性: 若 $a = c_1c_2...c_n = d_1d_2...d_m$, 其中 $c_i, d_j$ 均为 $R$ 中的不可约元, 则 $n = m$, 并且存在集合 $\{1, 2, ..., n\}$ 的一个置换 $\sigma$, 使得 $c_i \sim d_{\sigma(i)}, i = 1, 2, ..., n$;
6. 设 $R$ 是唯一分解整环, 则 $R$ 有如下等价性质:
   (a) $R$ 中不存在无限的元素序列 $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, 使得每个 $a_{i+1}$ 都是 $a_i$ 的真因子;
   (b) 对于 $R$ 中每个无限序列 $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, 如果 $a_{i+1}|a_i (i = 1, 2, ...)$ 均成立, 则必有正整数 $N$, 使得 $a_N \sim a_{N+1} \sim ...$;
7. 若 $R$ 为唯一分解整环, 则 $R$ 中的不可约元必为素元;
8. 最大公因子: 设 $R$ 是整环, $a, b \in R \backslash \{0\}$, $d$ 若满足下面的条件, 则称其为 $a$ 和 $b$ 的最大公因子, 记作 $(a, b)$:
   (a) $d|a, d|b$;
   (b) $\forall d'$ 满足 $d'|a, d'|b$, 有 $d'|d$;
   (c) 注意: 元素 $a$ 和 $b$ 的最大公因子不唯一, 因为与 $(a, b)$ 相伴的元素均是 $a$ 和 $b$ 的最大公因子, 且是全部最大公因子;
9. 互素: 若 $(a, b) \sim 1$, 则称 $a$ 与 $b$ 互素;
10. 设 $R$ 为整环, $a, b, c \in R \backslash \{0\}$, 则:
    (a) $c(a, b) \sim (ca, cb)$;
    (b) $(a, b) \sim 1, (a, c) \sim 1$, 则 $(a, bc) \sim 1$;
11. 设 $R$ 为唯一分解整环, 则 $R$ 中的任意两个非零元素 $a, b$ 都有最大公因子;
12. 每个主理想整环 (PID) 都是唯一分解整环 (UFD);

13. 欧式整环 (ED): 设 $\mathbb{N}$ 是非负整数集合, 若整环 $R$ 到 $\mathbb{N}$ 能定义一个映射 $\varphi : R \to \mathbb{N}$, 满足下面的性质, 则称该整环 $R$ 为欧式整环:

    (a) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

    (b) $\forall a, b \in R, b \neq 0$, 均存在 $q, r \in R$, 使得 $a = bq + r$ 且 $\varphi(r) < \varphi(b)$;

14. 每个欧式整环 (ED) 都是主理想整环 (PID), 从而也是唯一分解整环 (UFD);